1. Найдите $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$.

Решение:

Умножим наше выражение на $1-\frac{1}{3}$:

$$\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=$$
$$=\left[\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\right]\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=$$
$$=\left[\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\right]\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=\ldots$$
$$\ldots=\left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=$$
$$=\frac{1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right).$$

Ответ: $\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$

2. В соревнованиях по плаванию участвуют 40 спортсменов, среди которых 2 из России. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что под номером 12 будет выступать спортсмен из России.

Решение:

A={Под номером 12 выступает спортсмен из России}.

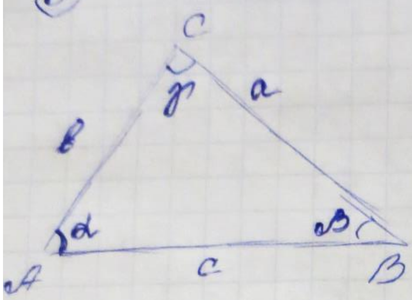
$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=0.05$.

Ответ: 0.05.

3. Доказать, что для любого треугольника ABC справедливо следующее соотношение $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\dfrac{c-b\cos\alpha}{b-c\cos\alpha}$.

Решение:

(3)



Доказать, что

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{c-b\cos\alpha}{b-c\cos\alpha}$$

Применим теорему косинусов

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
2. $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$
3. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Сложим 1 и 2-ое уравнения

$a^2+b^2=a^2+b^2+2c^2-2bc\cos\alpha-2ac\cos\beta\Rightarrow$

$2c^2=2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta\quad |:2c$

$c=b\cos\alpha+a\cos\beta\Rightarrow a\cos\beta=c-b\cos\alpha$ (*)

Сложим 1 и 3-ее уравнения

$a^2+c^2=a^2+2b^2+c^2-2bc\cos\alpha-2ab\cos\gamma$

$2b^2=2bc\cos\alpha+2ab\cos\gamma\quad |:2b$

$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma\Rightarrow a\cos\gamma=b-c\cos\alpha$ (**)

Используя (*) и (**), ~~имеем~~ получим

$$\frac{\cancel{a}\cos\beta}{\cancel{a}\cos\gamma}=\frac{c-b\cos\alpha}{b-c\cos\alpha}$$

ч.т.д.

4. Решите уравнение $\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(2x^2-5x+3\right)^3=\left(3x^2-2x-1\right)^3$**.**

Решение: Воспользуемся формулой $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

$$\left(x^2+3x-4\right)^3+\left(2x^2-5x+3\right)^3=$$

$$=\left(\left(x^2+3x-4\right)+\left(2x^2-5x+3\right)\right)\cdot\left(\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2+3x-4\right)\left(2x^2-5x+3\right)+\left(2x^2-5x+3\right)^2\right)=$$

$$=\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left(\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2+3x-4\right)\left(2x^2-5x+3\right)+\left(2x^2-5x+3\right)^2\right)=\left(3x^2-2x-1\right)^3.$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2+3x-4\right)\left(2x^2-5x+3\right)+\left(2x^2-5x+3\right)^2-\left(3x^2-2x-1\right)^3=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2+3x-4\right)\left(2x^2-5x+3\right)+\left(2x^2-5x+3\right)^2-\left(3x^2-2x-1\right)^2\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left\{\left(x^2+3x-4\right)-\left(2x^2-5x+3\right)\right\}+\left(2x^2-5x+3\right)^2-\left(3x^2-2x-1\right)^2\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left(-x^2+8x-7\right)+\left(2x^2-5x+3\right)^2-\left(3x^2-2x-1\right)^2\right]=0.$$

Воспользуемся формулой $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(x^2+3x-4\right)\left(-x^2+8x-7\right)+\\ \qquad\qquad +\left\{\left(2x^2-5x+3\right)-\left(3x^2-2x-1\right)\right\}\left\{\left(2x^2-5x+3\right)+\left(3x^2-2x-1\right)\right\}\end{array}\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left(-x^2+8x-7\right)+\left(-x^2-3x+4\right)\left(5x^2-7x+2\right)\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left(-x^2+8x-7\right)-\left(x^2+3x-4\right)\left(5x^2-7x+2\right)\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left\{\left(-x^2+8x-7\right)-\left(5x^2-7x+2\right)\right\}\right]=0,$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left(-6x^2+15x-9\right)\right]=0.$$

$$\left(3x^2-2x-1\right)\cdot\left[\left(x^2+3x-4\right)\left(-6x^2+15x-9\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-2x-1=0,\\ x^2+3x-4=0,\\ -6x^2+15x-9=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3},x=1,\\ x=-4,x=1,\\ x=1,x=1.5.\end{array}\right.$$

Ответ: -4, -1/3, 1, 1.5

5. Если x_1, x_2, x_3 решение системы $\begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1^4 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 = 32, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 = 16, \end{cases}$ то $x_1 + 4x_2 + x_3$ равно…

Решение:

$$\begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1^4 \cdot x_2^3 \cdot x_3^2 = 32, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \left(x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3\right) = 32, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 8 = 32, \\ \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\right) \cdot x_3 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4, \\ 4 \cdot x_3 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3 = 8, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4, \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot 4 = 8, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot 4 = 4, \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 \cdot x_2^2 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = 1, \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

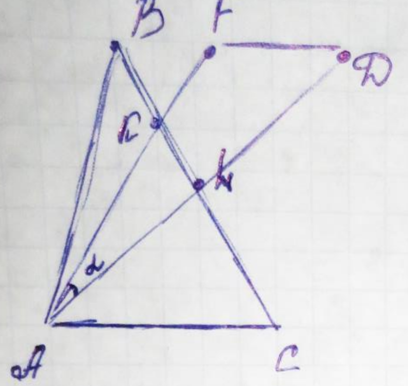
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot \left(x_1 \cdot x_2\right)^2 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = 1, \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot 1^2 = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = 1, \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Значит $x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 8.$

Ответ: 8.

6. Дан треугольник ABC. Точка L делит сторону BC пополам. Точка K делит пополам отрезок BL .Из вершины A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника отрезки LD и KF, причем $LD=AL$, $KF = \frac{AK}{3}$. Найти отношение площадей треугольника ABC и четырехугольника $KLDF$.

Решение:



Дано: $\triangle ABC$

$BL = LC$

$BK = KL$

$AL = LD$

$KF = \frac{AK}{3}$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CLDF}}$

В треугольниках ABC, ALC, AKL, ABL высоты, опущенные из точки A совпадают. По условию задачи $KL = \frac{1}{4} BC$.

$S_{ABC} = \frac{BC\,h}{2}$

$S_{ALC} = \frac{CL \cdot h}{2} = \frac{BC}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{S_{ABC}}{2}$

$S_{AKL} = \frac{KL \cdot h}{2} = \frac{1}{4} \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{S_{ABC}}{4}$

Пусть $\angle KAL = \alpha$

$S_{AKL} = \frac{AK \cdot AL \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{S_{ABC}}{4}$

$S_{AFD} = \frac{AF \cdot AD}{2} \sin\alpha = \frac{(AK + KF)(AL + LD)}{2} \sin\alpha =$

$= \frac{(AK + \frac{AK}{3}) \cdot 2AL}{2} \sin\alpha = \frac{4}{3} \frac{AK \cdot 2AL}{2} \sin\alpha =$

$= \frac{8}{3} \frac{AK \cdot AL}{2} \sin\alpha = \frac{8}{3} S_{AKL}$

$S_{KLDF} = S_{AFD} - S_{AKL} = \frac{8}{3} S_{AKL} - S_{AKL} = \frac{5}{3} S_{AKL} = \frac{5}{12} S_{ABC}$

$S_{ABC} : S_{KLDF} = S_{ABC} : \frac{5}{12} S_{ABC} = \frac{12}{5}$

Ответ:2.4