МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Алтайский государственный университет»

Утверждено решением Ученого совета Рубцовского института (филиала) АлтГУ протокол №2 от 20.09.2021 г.

РАБОЧАС ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «Математический анализ»

ПРОГРАММЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПЕРЕПОДГОТОВКИ

«ПЕДАГОГИКА И МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ»

Рубцовск
2021

Программа рассмотрена и одобрена на заседании методической комиссии Рубцовского института (филиала) АлтГУ от 21.09.2021 г., протокол № 2.

Председатель методической комиссии института:

Заместитель директора по учебной работе _____ О. Г. Голева

Руководитель центра:

Преподаватель _____ И. С. Краснослободцева

Разработчик:

Старший преподаватель _____ С. М. Палкина

Содержание

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....4
2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ.....4
3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....6
3.1. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН.....6
4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....8
5. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ 10
ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ.....11
1. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ.....12

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью реализации программы является формирование профессиональных компетенций по использованию базовых понятий математического анализа в курсе школьной математики, показать взаимосвязь математического анализа с дисциплинами естественнонаучного цикла.

Для достижения поставленной цели выделяются **задачи**:

− формирование понимания значимости математической составляющей в естественнонаучном образовании;

− формирование представления о роли и месте математики в мировой культуре;

− ознакомление с системой понятий, используемых для описания важнейших математических моделей и математических методов, и их взаимосвязью;

− выработка умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных задач;

− знание методов дифференциального и интегрального исчисления.

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

По окончании изучения разделов программы слушатели должны:

знать

− цели и задачи, содержание и особенности курса математического анализа в школе;

− основные требования к математической подготовке учащихся по годам обучения и критерии оценки их знаний и уровней интеллектуального развития по математическому анализу;

− методы решения задач в курсе начал математического анализа (10–11 кл.), в том числе повышенной сложности;

− основные понятия и теоремы анализа, с точки зрения заложенных в них фундаментальных математических и физических идей;

− связи между отдельными разделами курса математического анализа и дисциплинами естественнонаучного цикла;

уметь:

− находить производные, вычислять пределы, интегралы, формулировать и доказывать теоремы, применять методы математического анализа для решения математических задач, построения и анализа моделей механики, физики и естествознания, самостоятельно решать классические

задачи;

− использовать основные понятия математического анализа и применять их для доказательства простых теорем и решения задач;

− применять методы решения задач в курсе начал математического анализа (10–11 кл.), в том числе повышенной сложности;

− использовать в своей будущей профессиональной деятельности связи между отдельными разделами курса математического анализа и дисциплинами естественнонаучного цикла;

владеть:

− методами дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных, методами исследования функций, навыками практического использования современного математического инструментария для решения и анализа задач физики и естествознания.

3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Максимальная нагрузка студентов, час.	Количество аудиторных часов при очной форме обучения			Самостоятельная работа студентов, час.
			Лекции	Практические (семинарские) занятия	Лабораторные работы	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Раздел1. Последовательности. Функции						
Раздел 1	1. Введение в математический анализ. Множество действительных чисел. Комплексные числа и действия с ними	3	1			2
	2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Функция. Предел функции в точке и на бесконечности. Непрерывность функции. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции	6	1	1		4
Текущий контроль		***Тест***				
Раздел2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной						
Раздел 2	3. Определение производной. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Дифференциал. Определение и свойства.	6	1	1		4
	4. Основные теоремы дифференцирования. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме	6	1	1		4

	Лагранжа. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора					
	5. Исследование функции с помощью производной и построения ее графика	6	1	1		4
Текущий контроль		***Тестирование***				
Раздел3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных						
Раздел 3	6. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. Частные производные. Полный дифференциал	3		1		2
	7. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции в области	5	1			4
Текущий контроль		***Тестирование***				
Раздел 4. Интегральное исчисление						
Раздел 4	8. Интегрирование функций одной переменной. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования	4	1	1		2
	9. Определенный интеграл. Определение и свойства. Геометрические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченной функции. Приложения определенного интеграла	3	1			2
Текущий контроль		***Тестирование***				
Промежуточная аттестация		***Экзамен***				
Итого за весь курс часов		**42**	**8**	**6**		**28**

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 324 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://urait.ru/bcode/452409

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 315 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://urait.ru/bcode/452410

3. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 3-е изд. – Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 324 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://urait.ru/bcode/450170

Дополнительная литература

1. Баврин, И. И. Математический анализ: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 327 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://urait.ru/bcode/427808

2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Н. Берман. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 492 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://e.lanbook.com/reader/book/89934/#1

3. Горлач, Б.А. Математический анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б.А. Горлач. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 608 с. – [Электронный ресурс]. – URL: https://e.lanbook.com/reader/book/4863/#1

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», современных профессиональных баз данных, информационных справочных систем:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека On-line» [Электронный ресурс]. - М.: Издательство «Директ-Медиа», 2013-2021.- Режим доступа: http://www.biblioclub.ru
2. Электронно-библиотечная система Издательство «Лань» [Электронный ресурс]. - СПб.: Издательство Лань, 2013-2021.- Режим доступа: https://e.lanbook.com/.

3. Электронно-библиотечная система издательства «Юрайт» [Электронный ресурс]. – М.: ООО «Электронное изд-во Юрайт», 2016-2021. – Режим доступа: https://www.biblio-online.ru/about .

4. Электронная библиотечная система Алтайского государственного университета [Электронный ресурс]. – Барнаул, 2014-2021. – Режим доступа: http://elibrary.asu.ru/ .

5. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс]: информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования. – М.: ООО Научная электронная библиотека, 2021. – Режим доступа: https://elibrary.ru/projects/subscription/rus_titles_open.asp.

6. Электронно-библиотечная система «Znanium.com» [Электронный ресурс]. – М.: ООО «Научно-издательский центр Инфра-М», 2017-2021. – Режим доступа: http://znanium.com/

5. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории для проведения занятий всех видов (дисциплинарной подготовки); групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Для самостоятельной работы и подготовки к занятиям используются помещения, оснащенные компьютерной техникой с доступом к сети «Интернет» и электронной информационно образовательной среде института.

Специальные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации. Лабораторные занятия проводятся в компьютерных классах, а также в кабинете программирования и баз данных.

Требования к программному обеспечению учебного процесса:

- Windows 7 Professional Service Pack 1.
- 7-Zip.
- Acrobat Reader.
- Notepad++.
- Microsoft Office Professional Plus 2010.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

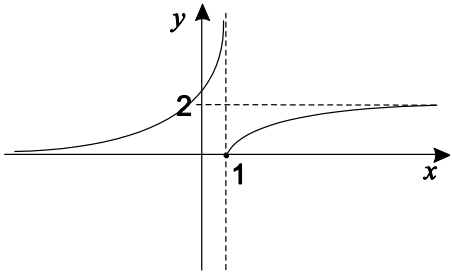
Перечень заданий / вопросов

Раздел 1. Последовательности. Функции

Задание 1. Пусть существуют пределы: $\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to a} g(x)$, тогда справедливо утверждение:

1. $\lim\limits_{x \to a}((f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a}((f(x) / g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = g(a)\lim\limits_{x \to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a}(kg(x)) = kg(a)$

Задание 2. Функция $f(x)$ задана графиком:



Верно утверждение:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
2. $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Задание 3. Функцию $f(x)$ является бесконечно малой в нуле, если:

1. $f(x) = x^2 - 7x$

2. $f(x) = 4x^3 - 8$
3. $f(x) = x\sin x$
4. $f(x) = x\cos x$.

Задание 4. Функция $f(x)$ является бесконечно большой при x = 2, если:

1. $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$
2. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$
3. $f(x) = ctg(x-2)$
4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-2x}$.

Задание 5. Предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x-3}$ равен:

1.0 2. ∞ 3. $-\infty$ 4. $+\infty$

Задание 6.Предел $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2-3x\right)$ равен:

1. –1 2. 9 3. 0 4. ∞

Задание 7.Предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}\right)$ равен:

1. 2 2. 3 3. -2 4. -3

Задание 8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^3+4}{3x^5+2x^4+1}$ равен:

1. 2 2. -2 3. -1 4. 4.

Задание 9.Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 3x}{\sin 2x}$ равен:

1. 3 2. -3 3. 6 4. 0.

Задание 10.Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{x}$ равен:

1. 2 2. -2 3. -1 4. 3.

Задание 11. Справедливо утверждение:

1. Если последовательности x_n и y_n монотонны и неограничены, то последовательность $x_n + y_n$ неограничена.

2. Если последовательности x_n и y_n монотонны и $y_n \neq 0$, то

последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ монотонна.

3. Всякая строго возрастающая последовательность целых чисел имеет член, больший 10.

4. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – возрастающие последовательности отрицательных чисел, то последовательность $\{x_n y_n\}$ убывает.

Задание 12. Значение a, при котором $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+a}}{ax+1}=-1$ равно:

1. 1.
2. -1
3. 2.
4. $\frac{1}{2}$.

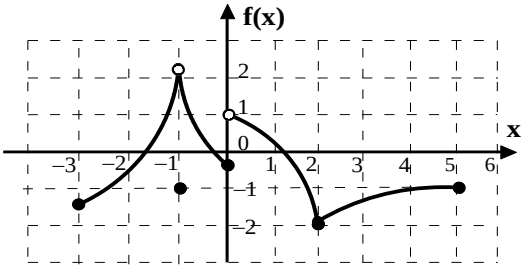
Задание 13. Дана функция $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4}$. Справедливо утверждение:

1. Функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке области определения.
2. Функция $f(x)$ имеет ровно две точки разрыва.
3. Функция $f(x)$ имеет точку устранимого разрыва.
4. Функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[-1;1]$.

Перечень заданий / вопросов

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

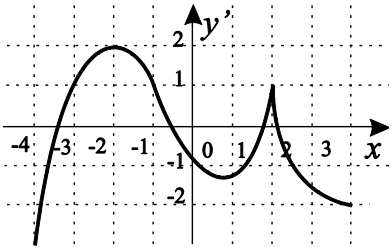
Задание 1. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-3;5]$ графиком:



Верно утверждение:

1. уравнение $f(x) = -1$ имеет четыре корня
2. при любом значении x выполняется неравенство $f(x) < 2$
3. на отрезке $[-3;-1]$ функция $f(x)$ возрастает
4. множеством значений функции $f(x)$ является отрезок $[-2;2]$

Задание 2. Производная y' функции $y = f(x)$ задана на отрезке [–4;4] графиком:



Верно утверждение:

1. На интервале (–4;0) имеется только одна точка экстремума функции $f(x)$
2. на отрезке $[-2;-1]$ функция $f(x)$ возрастает
3. На интервале (–3;–1) функция $f(x)$ имеет точку перегиба
4. На интервале (–1;0) функция $f(x)$ выпукла вверх
5. на отрезке $[-1;1.2]$ функция $f(x)$ имеет локальный минимум
6. при любом значении x выполняется неравенство $f(x) \le 2$
7. На интервале (–3;–1) функция $f(x)$ имеет экстремум
8. На интервале (–3;3) функция $f(x)$ дважды дифференцируема

Задание 3. Функция $f(x)$ не имеет точек перегиба, если:

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2$
2. $f(x) = 7x^5 + 8x^3$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = x^4 + 2x^2$.

Задание 4. Производная функции $4x^3 + 2x^2 - 1$ равна:

1. $12x^2 - 1$;
2. $4x^2 + 4x$;
3. $12x^2 + 4x - 1$;

4. $12x^2+4x$

Задание 5. Производная функции $5x^3\sin x$ равна:

1. $15x^2\cos x$
2. $15x^2\sin x+5x^3\cos x$
3. $15x^2+\cos x$
4. $5x^2\sin x+15x^2\cos x$

Задание 6. Производная функции $\sin^3(7x)$ равна:

1. $21x\sin^2 x\cos(7x)$
2. $21x\sin^2 x\cos x$
3. $3x\sin(7x)\cos x$
4. $21x\sin^2(7x)\cos(7x)$

Задание 7. Производная функции $4x^3-2x$ в точке $x = -1$ равна:

1.2
2. – 2
3.10
4.12.

Задание 8. Дифференциал функции $3x^3+2x$ в точке $x = -2$ равна:

1.-38
2.– 38Δx
3.-28
4.–28Δx.

Задание 9. Уравнение асимптоты при $x\to\infty$ к графику функции $\dfrac{6x^2-5x}{2x-1}$ имеет вид:

1. $3x+4$
2. $3x$
3. $6x-4$
4. $3x-1$.

Задание 10. Точка перегиба функции $4x^3-3x^2$ есть:

1. $x = 0$
2. $x = 1/4$
3. $x = 3/4$
4. $x = 1/2$.

Задание 11. Область возрастания функции $2x^2-16x+5$ есть:

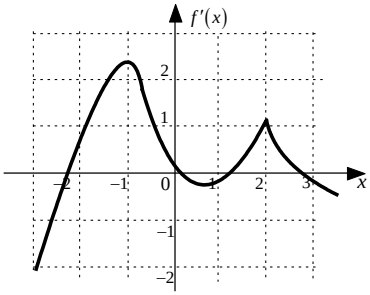
1.$x<4$

2. $x>4$
3. $x = 4$
4. x – любое.

Задание 12. Область убывания функции $f(x) = 3x^2 - 18x$ есть:

1. $x<3$
2. $x>3$
3. $x = 3$
4. x – любое.

Задание 13. Дан график производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$:



Справедливо утверждение:

1. на промежутке $(-1;0)$ функция $f(x)$ возрастает

2. на промежутке $(-2;0)$ график функции $f(x)$ имеет точку перегиба

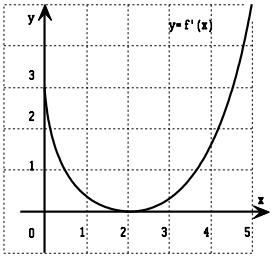
3. в точке -1 функция $f(x)$ имеет максимум

4. на промежутке $(2;3)$ функция $f(x)$ убывает

Задание 14. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на всей числовой оси. Известно, что $f(1) = 0$, $f'(2) = 3$, $g(1) = 2$, $g'(1) = 2$. Тогда производная функции $f(g(x))$ в точке 1 равна

1. 1
2. 2
3. 3
4. 6

Задание 15. Дан график производной $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, заданной на промежутке $[0;5]$.



Справедливо утверждение:

1.Функция $f(x)$ выпукла вниз.

2.Функция $f(x)$ строго возрастает.

3.Функция $f(x)$ не имеет корней.

4.График функции $f(x)$ имеет точку перегиба.

Задание 16. Функция $f(x)$ определена на промежутке $(0;2)$. Справедливо утверждение:

1. Если $f(x)$ строго возрастает на промежутке $(0;1)$ и строго убывает на промежутке $(1;2)$, то 1 является точкой максимума этой функции.

2. Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \neq 1$, причем $f'(x) < 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) > 0$ при $1 < x < 2$, то 1 является точкой минимума функции $f(x)$.

3. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $(0;2)$, строго убывает на промежутке $(0;1)$ и строго возрастает на промежутке $(1;2)$, то 1 является точкой минимума этой функции.

4. Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \neq 1$ и имеет положительную вторую производную при всех $x \neq 1$, то 1 является точкой минимума функции $f(x)$.

Перечень заданий / вопросов
Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных **Задание 1.**

Как называется предел отношения приращения $\Delta_x z$ функции $z = f(x, y)$ к приращению x переменной x при стремлении x к нулю?	1) Условный экстремум 2) Градиент 3) Частный дифференциал 4) Производная по направлению 5) Частная производная

Задание 2.

Как называется выражение $\nabla z = (z'_x, z'_y)$?	1) Условный экстремум 2) Градиент 3) Частный дифференциал 4) Производная по направлению 5) Частная производная

Задание 3.

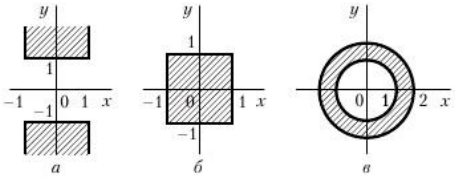
Что определяется выражением $z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta$	1) Условный экстремум 2) Градиент 3) Частный дифференциал 4) Производная по направлению 5) Частная производная

Задание 4

К чему относится определение: существует окрестность такая, что для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой окрестности и удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = C$, выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) > f(x_0, y_0)]$	1) Условный экстремум 2) Градиент 3) Частный дифференциал 4) Производная по направлению 5) Частная производная

Задание 5

Дана функция двух переменных $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$. Тогда область определения этой функции изображена на рисунке...



1) *а*
2) *б*
3) *в*
4) ни на одном из них

Задание 6

Частная производная по y функции $z = \frac{1}{3}x^3 - xy - 3y^2 + 11x + 7y$ равна...

1) $z'_y = x^2 - y + 11$
2) $z'_y = -xy - 6y + 18$
3) $z'_y = x^2 - x + 7$
4) $z'_y = -x - 6y + 7$
5) $z'_y = -x - 3y + 11$

Задание 7

Частная производная по x функции $z = x^3 + 3x^2 - 5xy - 4y^2 + 15y - 8$ равна...

1) $z'_x = 3x^2 + 6x - 8$
2) $z'_x = 3x^2 + 6x - 5y$
3) $z'_x = 6x^2 + 6x - 13y + 15$
4) $z'_x = x^3 + 3x^2 - 5xy$

Задание 8

Частная производная по y функции $z = x^5y^2 + 2x^3y^3 - 3x^2 - 7y^2 + 5x + 19$ равна...

1) $z'_y = 10x^4y + 18x^2y^2 - 11xy$
2) $z'_y = x^4y + 2x^2y^2 - 14y$
3) $z'_y = 2x^5y + 6x^3y^2 - 14y$
4) $z'_y = 2x^5y + 18x^2y^2 - 14y$
5) $z'_y = 10x^5y + 18x^3y^3 - 11xy$

Задание 9

Частная производная по x функции $z = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 - 6y^5 + 3x^2 + 25$ равна...

1) $z'_x = 9x^2y^2 + 4x^2y - 30y$
2) $z'_x = 18xy^2 + 8xy - 18xy^4$
3) $z'_x = 6xy^3 + 4xy^2 + 6x$
4) $z'_x = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 + 6x$

Задание 10

Максимум функции $z = xy$ при условии $x + y = 6$ равен...

Задание 11

Функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - C)$$

является функцией...

1) Лежандра
2) Лагранжа
3) Лобачевского
4) Коши
5) Лопиталя

Задание 12

Если $U = \cos(2x^2 + y + z^3)$, то значение U'_y в точке $M(0, \frac{\pi}{4}, 0)$ равно...

1) 1
2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) 0
4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задание 13

Если $U = e^{(2x - 3y + z^2)}$, то значение U'_y в точке $M(1, 1, 1)$ равно...

Задание 14

Найти частную производную $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(2, -3)$ функции

$$z = \frac{2y + 1}{x^2 + 6}$$

Задание 15

Найти критическую точку функции $z = x^2 + 3xy - \frac{7}{2}y^2 - 5x + 4y + 18$

1) $M\ (1, 1)$
2) $M\ (1, 2)$
3) $M\ (2, 1)$
4) $M\ (2, 2)$

Перечень заданий / вопросов

Раздел 4. Интегральное исчисление

Задание 1.

Неопределенный интеграл — это...

1) числовой интервал
2) уравнение
3) совокупность функций
4) число
5) функция

Задание 2.

Найдите интеграл $\int x^2 3^{x^3} dx$

1) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$
2) $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x+5}{2x-5}\right| + C$
3) $-\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x+5}{2x-5}\right| + C$
4) $\frac{3^{x^3}}{3} + C$
5) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3} + C$

Задание 3.

$[\int f(x)dx]' = ...$

1) $f(x)dx$
2) $df(x)$
3) $f(x) + C$
4) $f(x)$

Задание 4

Множество первообразных функции $f(x) = e^{3x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{3}e^{3x} + C$ 2) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ 3) $e^{3x} + C$ 4) $3e^{3x} + C$

Задание 5

Множество первообразных функции $f(x) = e^{2x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{2}e^{2x} + C$ 2) $e^{2x} + C$ 3) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ 4) $2e^{2x} + C$

Задание 6

Интеграл $\int 7e^{7x}dx$ равен...	1) $7e^{7x} + C$ 2) $\frac{1}{7}e^{7x} + C$ 3) $e^{7x} + C$ 4) $7e^{x} + C$

Задание 7

В неопределенном интеграле $\int \frac{x}{\sqrt{x} - 1}dx$ введена новая переменная $t = \sqrt{x}$. Тогда интеграл примет вид...	1) $2\int \frac{t^3}{t - 1}dt$ 2) $\int \frac{t^3}{2(t - 1)}dt$ 3) $\int \frac{t^2}{t^2 - 1}dt$ 4) $2\int (t^2 - 1)dt$

Задание 8

Правильную рациональную дробь $\dfrac{2x+1}{(x+1)^2(x^2+4x+5)^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей...	1) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{(x+1)^2}+$ $+\dfrac{D}{x^2+4x+5}+$ $+\dfrac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ 2) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+$ $+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+5}+$ $+\dfrac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ 3) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+$ $+\dfrac{C}{x^2+4x+5}+$ $+\dfrac{D}{(x^2+4x+5)^2}$ 4) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+$ $+\dfrac{5}{x^2+4x+5}+$ $+\dfrac{2}{(x^2+4x+5)^2}$

Задание 9

Определенный интеграл — это...	1) числовой интервал 2) уравнение 3) совокупность функций 4) число 5) функция

Задание 10

Формула $\int\limits_b^a f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$ называется формулой...	1) Коши — Буняковского 2) Ньютона — Лейбница 3) Фробениуса — Перрона 4) Больцано — Коши 5) Бойля — Мариотта

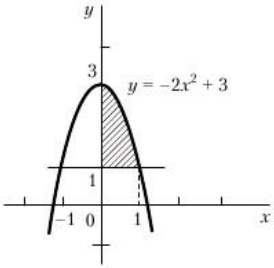
Задание 11

Если $f(x)$ определена в точке a, то чему равен $\int\limits_b^a f(x)dx$?

1) $F(a)$ 2) a
3) a^2 4) 1
5) 0

Задание 12

Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом...



1) $\int\limits_{-1}^{0} (-2x^2 + 3)dx$

2) $\int\limits_{0}^{1} (2 - 2x^2)dx$

3) $\int\limits_{0}^{1} (2x^2 - 2)dx$

4) $\int\limits_{0}^{3} (3 - 2x^2)dx$

Задание 13

Определенный интеграл $\int\limits_1^{\pi/2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ равен...

1) $1 + \ln 2$
2) $\ln 4$
3) $1 + \ln 5$
4) $\ln 2$

Задание 14

Определенный интеграл $\int\limits_1^{\pi/2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ равен...

1) $1 + \ln 2$
2) $\ln 4$
3) $1 + \ln 5$
4) $\ln 2$

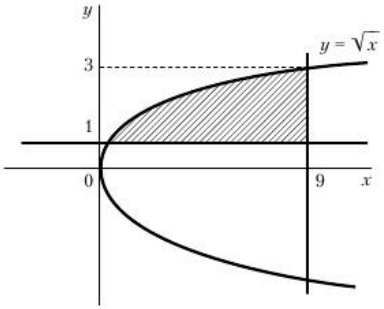
Задание 15

Согласно теореме о среднем если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка c $[a, b]$ такая, что $\int\limits_b^a f(x)dx = ...$

1) $f(c)(b - a)$
2) $abf(c)$
3) $(a - c)(b - c)$
4) $F(c)$
5) $f(c)$

Задание 16

Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...



1) $\int_1^9 (1 - x^2)dx$

2) $\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)dx$

3) $\int_1^9 (x^2 - 1)dx$

4) $\int_0^9 (\sqrt{x} - 1)dx$

5) $\int_0^9 (1 - \sqrt{x})dx$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Перечень заданий /вопросов
1.Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ 1. Множество действительных чисел. 2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Переход к пределу в неравенствах. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. 3. Функция. Способы задания функции. График функции, преобразования графиков функций. 4. Предел функции в точке по Коши и по Гейне. 5. Предел функции на бесконечности. 6. Односторонние пределы. 7. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. 8. Свойства предела функции. 9. Непрерывность функции в точке. Основные теоремы о непрерывных функциях. 10. Точки разрыва, их классификация. 11. Определение производной. Геометрический и механический смысл производной. 12. Дифференциал. Определение и свойства. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. 13. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа. Правило Лопиталя. 14. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции. 15. Частные производные. Геометрический смысл частных производных. 16. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. 17. Табличные интегралы. 18. Определенный интеграл. Определение и свойства. Формула Ньютона-Лейбница. 19. Геометрические приложения определенного интеграла. 20. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченной функции. Признаки сходимости несобственных интегралов. **2.Вопросы для проверки уровня обученности УМЕТЬ** 1. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

2. Замечательные пределы.

3. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные функции.

4. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций.

5. Производная сложной и обратной функций.

6. Дифференцирование параметрически заданных функций и функций заданных неявно.

7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.

8. Признаки возрастания и убывания функции. Точки экстремума функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.

9. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

10. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

11. Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

12. Дифференцирование сложной функции. Производная функции, заданной неявно.

13. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора.

14. Производная по направлению. Градиент.

15. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в области.

16. Замена переменной и интегрирование по частям.

17. Интегрирование рациональных дробей.

18. Интегрирование тригонометрических функций.

19. Интегрирование иррациональных функций.

3.Задания для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ

1. Вычислить пределы:

а. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+5x^2+6x+1)$

б. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

в. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

г. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2}{x^2-1}$

д. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

е. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

ж. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{8x}$

з. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-2}{x^2 6x+1}$

2. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\pi\cdot x/2)}{x+1}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{(x+2)}$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$

ж) $y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$

з) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$

3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при различных значениях а: $-2; 1; +\infty$.

4. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2$

5. Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

а) $y=(4x-x^2)/4,\ x_0=2$;

б) $y=\sqrt{4-2x^2}, x_0=-1;$

в) $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}, x_0=\sqrt{2}$

6. Найти дифференциал dy.

а) $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right);$

б) $y=e^x\cos x;$

в) $y=5^{x^2}\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right);$

7. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\ x=1{,}012;$

8. Найти производную функцию по определению производной: а) $y=\sqrt{2x-3}$; б) $y=\dfrac{4}{3x+5}$.

9. Найти производную

а) $y=\dfrac{2\left(3x^3+4x^2-x-2\right)}{15\sqrt{1+x}};$

б) $y=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right);$

в) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x};$

г) $y=\left(arctg\ x\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)\ln arctg\ x};$

д) $\begin{cases} x=\dfrac{3t^2+1}{3t^3} \\ y=\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right) \end{cases}.$

е) $b^3x^2+a^3y^2=a^3b^2$

10. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной

параметрически $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sec^2 t \end{cases}$;

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных отрезках

а) $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16, \quad [1,4]$;

б) $y = \sqrt{100 - x^2}$ *на* $[-6,8]$;

в) $y = \sqrt[5]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ *на* $[-3;3]$.

12. Провести полное исследование функции и построить графики

а) $y = (x^3 + 4)/x^2$;

б) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$;

в) $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 15$;

г) $y = \dfrac{(12 - 3x^2)}{(x^2 + 12)}$.

13. Найти вторые частные производные функции

а) $u = z \cdot e^{x^2 y}$

б) $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

в) $u = x^2 \sin\sqrt{y - z}$

г) $u = xye^z$

14. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

а) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26{,}46$;

б) $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$;

в) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$, $x_0 = 4$;

15. Вычислить $z = \dfrac{(2-3i)(3+4i) - 2(5i-1)}{2+i}$, указать вещественную и мнимую часть этого комплексного числа

16. Решите уравнения в комплексных числах:

а) $x^2 - 4x + 8 = 0$; б) $x^2 + ix + 6 = 0$.

17. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $z \cdot \bar{z} = (2+i)^2 + \dfrac{17}{1+4i}$

18. Найдите все действительные значения a, для которых система уравнений $\begin{cases} |z+3ai| = 1 \\ |z-a| = 3 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение

19. Найти неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{arctg\, x}{1+x^2}dx$

б) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

в) $\displaystyle\int (4-3x)e^{-3x}dx$

г) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x}dx$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$

20. Вычислить определенные интегралы.

а) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^3}$

в) $\displaystyle\int_0^{16} \sqrt{256 - x^2}\, dx$

г) $\displaystyle\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

д) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$

21. Вычислить несобственный интеграл

а) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

б) $\int_0^{+\infty} \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$

в) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{\left(1+e^x\right)^2}$

22. Вычислить площади фигур, ограниченных

а) $y=(x-2)^3, y=4x-8.$

б) $y^2=4x, x^2=4y.$

23. Вычислить площади фигур ограниченных линиями, заданными уравнениями

а) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$,

$x=2(x\geq 2)$

б) $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$

$y=4(y\geq 4)$

24. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах

а) $r=4\cos 3\varphi, r=2(r\geq 2)$

б) $r=\sin\varphi, r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{-\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\right)$

25. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат

а) $y=\ln x, \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{15}$

б) $y=2+chx, 0\leq x\leq 1$

26. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями

а) $\frac{x^2}{9}+y^2=1, z=y, z=0(y\geq 0)$

б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, z=y\sqrt{3}, z=0(y\geq 0).$