1. Найдите произведение $\left(tg^2 1^\circ - 3\right)\left(tg^2 2^\circ - 3\right)...\left(tg^2 88^\circ - 3\right)\left(tg^2 89^\circ - 3\right)$.

Решение: Среди сомножителей есть разность $tg^2 60^\circ - 3$, равная 0, поэтому произведение равно 0.

Ответ:0.

2. Решите уравнение $\sqrt{2x+14+8\sqrt{2x-2}} + \sqrt{2x+2-4\sqrt{2x-2}} = 6$.

Решение:

Замена $y = \sqrt{2x-2},\ y \ge 0$, $\begin{matrix} y^2 = 2x-2, \\ 2x = y^2 + 2. \end{matrix}$

Тогда

$$\sqrt{y^2+2+14+8y} + \sqrt{y^2+2+2-4y} = 6,$$
$$\sqrt{y^2+8y+16} + \sqrt{y^2-4y+4} = 6,$$
$$\sqrt{(y+4)^2} + \sqrt{(y-2)^2} = 6,$$
$$|y+4| + |y-2| = 6.$$

Нули модуля: $\begin{matrix} y+4=0, y-2=0, \\ y=-4, y=2. \end{matrix}$

$$|y+4|+|y-2| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le -4, \\ -y-4-y+2=6, \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < y \le 2, \\ y+4-y+2=6, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 2, \\ y+4+y-2=6, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le -4, \\ -2y=8, \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < y \le 2, \\ 0 \cdot y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 2, \\ 2y=4, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le -4, \\ y=-4, \end{cases} \\ \begin{cases} -4 < y \le 2, \\ y \in R, \end{cases} \\ \begin{cases} y > 2, \\ y=2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ -4 < y \le 2, \\ y = \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow y \in [-4, 2].$$

Возвращаемся к замене: $2x = y^2 + 2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} + 1.$

Поскольку $y \geq 0$,то $y \in [0,2]$.

Значит $x \in [0,3]$.

Ответ: [1,3].

3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 + xy = 1, \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$

Решение:

Пусть $z = \frac{3x}{(1-x)^2}$, тогда второе уравнение перепишется в виде: $z^2 = 2 + zy$ (1). Разделив первое уравнение на x^2, получим: $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2 + \frac{1}{x} \cdot y, \quad x \neq 0$ (2). Вычтем (2) из (1): $\left(z - \frac{1}{x}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) = \left(z - \frac{1}{x}\right)y$, откуда либо 1) $z = \frac{1}{x}$, либо 2) $z + \frac{1}{x} = y$.

Имеем: 1) $\frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x}, \; 3x^2 = 1 - 2x + x^2, \; 2x^2 + 2x - 1 = 0, \; x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Теперь из первого уравнения системы получим: $\frac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)^2}{2} + \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} y = 1$. Отсюда $y = 2$.

2) $xz + 1 = xy$. Подставляя это в первое уравнение системы, получим: $2x^2 + xz + 1 = 1, \; x(2x + z) = 0$. Так как $x \neq 0$, то $2x + z = 0, \; 2x + \frac{3x}{(1-x)^2} = 0$. Последнее уравнение не имеет корней отличных от нуля.

Ответ: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, y = 2$

4. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья - за 13 минут и выпить кастрюлю молока за 14 минут. Карлсон может сделать это же за 6, 6 и 7 минут. За какое наименьшее время они могут позавтракать банкой варенья, кастрюлей молока и тортом?

Решение: Совершенно ясно, что если Малыш и Карлсое хотят съесть завтрак за наименьшее время, то начать и кончить они должны одновременно – в проивном случае один из них может помочь другому и сократить затрачиваемое время.

Обозначим через x, y, z доли торта, варенья и молока, которые съел Малыш; тогда $(1-x),(1-y),(1-z)$ – доли этих продуктов, которые съел Карлсон, а время, которое они затратили, равно $t=10x+13y+14z=6(1-x)+6(1-y)+7(1-z)$.

Тем самым мы приходим к следующей задачи: найти наименьшее значение величины $t=10x+13y+14z$, если числа x, y, z удовлетворяют условиям $x, y, z\in[0,1]$ и $10x+13y+14z=6(1-x)+6(1-y)+7(1-z)$.

Из последнего соотношения можно выразить z через x и y: $z=\frac{1}{21}(19-16x-19y)$.

Подставляя это выражение в формулу для t, получаем $t=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{38}{3}$.

Ответ: 12 минут

5. Общая хорда двух пересекающихся окружностей служит для одной из них стороной правильного вписанного четырехугольника, а для другой стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей окружности равен 10 см?

Решение:

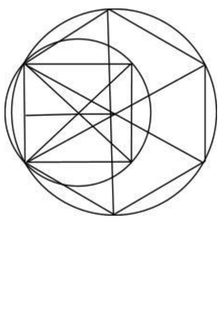


Рис1.

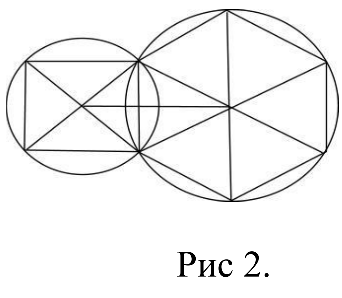


Рис 2.

В этой задаче возможны два варианта расположения центра меньшей окружности: Снаружи и внутри большей окружности. Оба варианта расположения изображены на рисунках 1 и 2. В первом случае расстояние между центрами окружностей равно сумме длин высоты равнобедренного прямоугольного треугольника, из которых сложен вписанный квадрат, и высоты равностороннего треугольника, из которого сложен правильный вписанный шестиугольник. Во втором случае – их разность.

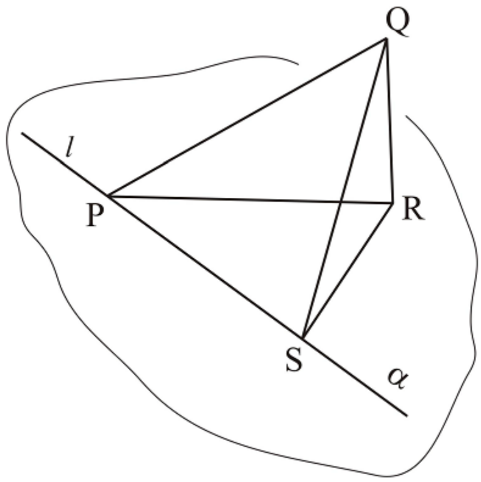
Так как диагональ квадрата является диаметром меньшей окружности, то длина стороны квадрата равна $10\sqrt{2}$ см, и равна длине общей хорды окружностей. Следовательно, радиус большей окружности равен $10\sqrt{2}$ см. Тогда длина первой высоты равна $10\sqrt{2}:2=5\sqrt{2}$ см, а длина второй высоты равна $10\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{6}$.

$$5\sqrt{6}\pm5\sqrt{2}=5\left(\sqrt{6}\pm\sqrt{2}\right)$$

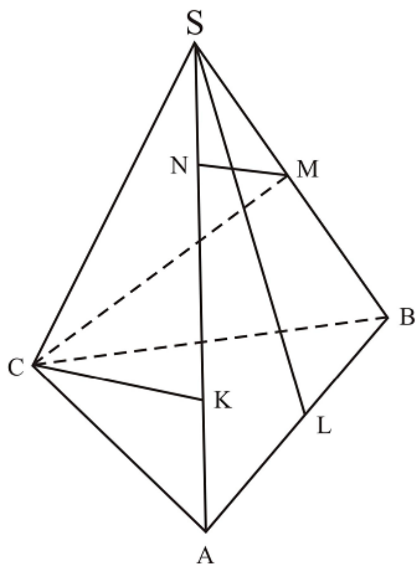
Ответ: $5\left(\sqrt{6}\pm\sqrt{2}\right)$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребра основания ABC равны 2, боковые ребра равны 5, точка M – середина ребра SB. Отрезок CM проектируется перпендикулярно на некоторую плоскость, проходящую через прямую SA. Какое наименьшее значение может иметь длина проекции?

Решение:



Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть в пространстве заданы некоторая прямая l, плоскость α, проходящая через l и некоторый отрезок PQ, который проектируется на α. Будем считать, что один из концов отрезка (точка P) лежит на прямой l. Из точки Q опустим перпендикуляр QR на плоскость α и перпендикуляр QS на прямую l. По теореме о трёх перпендикулярах RS тоже перпендикуляр к l. В прямоугольном



треугольнике PRS катет PS не больше гипотенузы PR, значит, длина проекции PR отрезка PQ на плоскость α не может быть меньше, чем проекция PS отрезка PQ на прямую l. Для того, чтобы эти величины совпали достаточно выбрать плоскость α так, чтобы она была перпендикулярна плоскости PQS. В этом случае QS окажется перпендикуляром к α и точки R и S совпадут.

Для нашей задачи это означает, что наименьшая величина проекции отрезка CM на плоскость, проходящую через ребро SA, равна проекции CM на прямую SA.

Опустим из точек C и M

перпендикуляры CK и MN на SA.

Пусть L – середина отрезка AB, а $\beta = \angle LSB$. Тогда $\sin\beta = \frac{LB}{SB} = \frac{1}{5}$.

Имеем: $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = \frac{23}{25}$.

Из прямоугольного треугольника SMN: $SN = SM \cdot \cos 2\beta = \frac{5}{2} \cdot \frac{23}{25} = \frac{23}{10}$

Из прямоугольного треугольника SCK: $SK = SC \cdot \cos 2\beta = 5 \cdot \frac{23}{25} = \frac{23}{5}$.

Теперь находим: $NK = SK - SN = \frac{23}{5} - \frac{23}{10} = \frac{23}{10}$.

Ответ: $\frac{23}{10}$.

Ответ: 2.3